TOBB ETÜ EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
MAT 203 Lineer Cebir ve Diferensiyel Denklemlere Giriş Arasınavı 03.11.2017

Ad-Soyad: **No:**
Bölüm: **İmza:** **Süre:** ***110 dk***

1	2	3	4	5	6	Total:

SORULAR: ***(Tam puan almak için gerekli tüm adımların yazılması gerekmektedir)***

1) (15 puan) $p(x)=x^2-2x-3$ ve $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ olmak üzere, $p(A)$ 'yı bulunuz.

Çözüm: I 2x2 birim matris olmak üzere, $p(A)=A^2-2A-3I$ dır. Buna göre,

$$p(A)=A^2-2A-3I=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad p(A)=A^2-2A-3I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$ bulunur.

2) (15 puan) $\left(\frac{1}{x}+2y^2x\right)dx+\left(2yx^2-\cos y\right)dy=0;\ y(1)=\pi,\ x>0$ diferensiyel denkleminin tam olduğunu gerçekleyiniz ve sonra çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=\frac{1}{x}+2y^2x$ ve $N(x,y)=2yx^2-\cos y$ olsun.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy \text{ ve } \frac{\partial N}{\partial x}=4xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ denklem TAM dır.

O halde, $f(x,y)=C$ olacak şekilde bir $f(x,y)$ fonksiyonu vardır. Tamlık kriterinden,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=\frac{1}{x}+2y^2x \text{ (1) ve } \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=2yx^2-\cos y \text{ (2)}$$

(1) denklemi x 'e göre integre edilirse,

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)=\int\left(\frac{1}{x}+2y^2x\right)dx+g(y)=\ln|x|+y^2x^2+g(y) \quad (3)$$

(3) denkleminin y ' ye göre türevini alıp (2) denklemine eşitlenmesinden,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2yx^2-g'(y)=2yx^2-\cos y \Rightarrow g'(y)=\cos y \Rightarrow g(y)=\sin y+C$$

Hence, $f(x,y)=\ln|x|+y^2x^2+\sin y=C$

$y(1)=\pi$ başlangıç koşulu kullanılırsa, $\ln|1|+\pi^2 1^2+\sin\pi=C \Rightarrow C=\pi^2$

Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN

3) **(15 puan)** $y^{(5)} - y^{(3)} = e^x + 2x^2 - 5$ denkleminin $y_p(x)$ özel çözümünün uygun formunu oluşturunuz fakat katsayılarının değerlerini bulmayınız.

Çözüm: Denklemin homojen kısmına ait çözümü bulmak için, $y^{(5)} - y^{(3)} = 0$ denkleminden karakteristik denklemi,

$r^5 - r^3 = 0 \Rightarrow r^3\left(r^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow r = 0$ (3-katlı) ve $r = \pm 1$. Buradan,

$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \left(c_3 + c_4 x + c_5 x^2\right) e^{0x}$ olur.

$y_p(x)$ özel çözümü $y_p(x) = Ae^x + Bx^2 + Cx + D$.

Ancak, y_c nin bazı terimleri $y_p(x)$ de olduğundan (veya benzer terimler olduğundan), benzerliği ortandan kaldırmak için x in kuvvetleri ile çarpılmalıdır. Buna göre $y_p(x)$ özel çözümünün uygun formu,

$$\boxed{y_p(x) = Ae^x \cdot x + \left(Bx^2 + Cx + D\right) \cdot x^3}$$

4) **(15 puan)** $\left(xy^2 - 2y^2\right)dx + \left(x^2 y - 2x^2\right)dy = 0$ denkleminin değişkenlere ayrılabilir olduğunu gösteriniz ve çözünüz.

Çözüm: $\left(xy^2 - 2y^2\right)dx + \left(x^2 y - 2x^2\right)dy = 0$ denklemi $y^2\left(x-2\right)dx + x^2\left(y-2\right)dy = 0$ olarak yazılabildiğinden,

(*) $\left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{y-2}{y^2}\right)dy = 0$ elde edilir. Böylece denklem değişkenlere ayrılabilirdir.

(*) denklemi integre edilirse,

$$\int\left(\frac{x-2}{x^2}\right)dx + \int\left(\frac{y-2}{y^2}\right)dy = \int 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{x} + \ln|x| + \frac{2}{y} + \ln|y| = C}$$

5) (20 puan) $x' = 4x + y,\ y' = 6x - y$ diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x' &= 4x + y \quad (1) \\ y' &= 6x - y \quad (2) \end{aligned}$$ (1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$x'' = 4x' + y'$ (3)

(2) denklemi ve (1) den y çekilip ($y = x' - 4x$) (3) denkleminde yazılırsa,

$$x'' = 4x' + 6x - y = 4x' + 6x - (x' - 4x)$$

$\Rightarrow\ x'' - 3x' - 10x = 0$ (4) ikinci mertebe homojen sabit katsayılı lineer denklemi bulunur.

(4) denklemi çözülürse;

$r^2 - 3r - 10 = 0 \ \Rightarrow\ r = 5$ ve $r = -2$.

O halde, $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}$ elde edilir.

$x'(t) = 5c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-2t}$ ve $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}$, $y = x' - 4x$ de yazılırsa,

$$y(t) = x' - 4x = 5c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-2t} - 4\left(c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}\right)$$

$\Rightarrow\ y(t) = c_1 e^{5t} - 6c_2 e^{-2t}$ bulunur. Buna göre diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü,

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= c_1 e^{5t} - 6c_2 e^{-2t} \end{aligned}}$$

6) (20 puan) $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. A^{-1} ters matrisini bulunuz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ olduğundan,

$$\det(A)=\left(\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right)=1$$

O halde,

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) & -\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) & -\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \end{bmatrix}$$